数理解析研究所講究録
1114 巻 1999 年 1-12

Convergence theorems for resolvents of accretive operators and convex minimization problems

Wataru Takahashi (高橋　渉)

TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF MATHEMATICAL AND COMPUTING SCIENCES
(東京工業大学大学院情報理工学研究科)

1　はじめに

H を Hilbert 空間とし，C を H の空でない閉凸集合とする．$f: H \to (-\infty, \infty]$ を proper で凸な下半連続関数とする．このとき，凸最小化問題

$$\min\{f(x): x \in C\} = \alpha$$

を考えよう．α は optimal value といわれ，C は admissible set といわれる．集合 $M = \{y \in C: f(y) = \alpha\}$ は optimal set といわれる．つぎに，この f を用いて

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in C) \\ \infty & (x \notin C) \end{cases}$$

を考えよう．このとき，g は H から $(-\infty, \infty]$ に値をとる proper で凸な下半連続関数である．そこで，我々は

$$\min\{g(x): x \in H\} \tag{1}$$

という凸最小化問題を考えることができる．このような g に対して，H 上の集合値写像 ∂g を，$x \in H$ に対して

$$\partial g(x) = \{x^* \in H: g(y) \geqq g(x) + (x^*, y - x), \, y \in H\}$$

で定義し，これを g の劣微分と呼ぶ．H 上の集合値写像 $A \subset H \times H$ は，任意の $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ に対して

$$(x_1 - x_2, \, y_1 - y_2) \geqq 0$$

を満たすならば，増大であるといわれ，$\lambda > 0$ に対して，A の resolvent が

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$$

で定義される．増大写像 A が，すべての $\lambda > 0$ に対して，$R(I + \lambda A) = H$ を満たすならば，$m-$ 増大といわれる．ただし，$R(I + \lambda A)$ は $I + \lambda A$ の値域を表す．proper で凸な下半連続関数 $g: H \to (-\infty, \infty]$ に対して，その劣微分 ∂g は $m-$ 増大になることが知られている．

(1) の解を求めるよく知られた方法として，Martinet[9] によって導入された proximal point algorithm というものがある．このアルゴリズムは，resolvent J_λ に関係がある．すなわち，

$$J_\lambda x = \operatorname{argmin}\left\{ f(z) + \frac{1}{2\lambda}\|z-x\|^2 : z \in H \right\}$$

である（Moreau[10] を参照せよ）．

proximal point algorithm とは，$\{\lambda_n\} \subset (0,\infty)$ とするとき，$x_0 \in H$ を初期点とし，

$$x_{n+1} = J_{\lambda_n} x_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

で帰納的に点列 $\{x_n\}$ を生成し，(1) の解を求める点列的構成法のことである（Rockafellar[13] を参照せよ）．

一方，我々は，非拡大写像 T の 2 つの不動点近似法を知っている．Halpern[4] によって導入された点列的近似法

$$x_0 = x \in H,\ x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n) T x_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

と，あとは Mann[8] によって導入された

$$x_0 = x \in H,\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) T x_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

の近似法である．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ である．

ここでは，Halpern と Mann によって導入された点列的不動点近似法を用いて，(1) の解を求める点列的構成法を議論するのが一つの目的である．Halpern による構成法では強収束のかたちで (1) の解が求まり，Mann による構成法を用いると，Rockafellar の定理 [13] が一般化されたかたちで得られる．

2 準備

E を Banach 空間とし，E^* をその共役空間とする．$x \in E$ における $x^* \in E^*$ の値を $x^*(x)$ または (x, x^*) で表す．E における点列 $\{x_n\}$ が x に強収束することを $x_n \to x$ で表し，弱収束することを $x_n \rightharpoonup x$ で表す．

E の凸性の modulus δ は，$0 \leqq \varepsilon \leqq 2$ となる ε に対して

$$\delta(\varepsilon) = \inf\left\{ 1 - \frac{\|x+y\|}{2} : \|x\| \leqq 1,\ \|y\| \leqq 1,\ \|x-y\| \geqq \varepsilon \right\}$$

で定義される．Banach 空間 E が一様凸であるとは，$\varepsilon > 0$ に対して，$\delta(\varepsilon) > 0$ がつねに成り立つときをいう．E の元 x に対して，

$$J(x) = \{x^* \in E^* : (x, x^*) = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

が定義されるが，この J を E 上の duality 写像という．$U = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ としよう．このとき，$x, y \in U$ に対して，極限

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} \tag{2}$$

を考えよう．E のノルムが Gâteaux 微分可能であるとは，任意の $x, y \in U$ に対して，(2) がつねに存在するときをいう．E のノルムが一様に Gâteaux 微分可能であるとは，任意の $y \in U$ に対して，(2) が $x \in U$ に関して一様に収束するときをいう．E のノルムが Fréchet 微分可能であるとは，任意の $x \in U$ に対して，(2) が $y \in U$ に関して一様に収束するときをいう．E が Gâteaux 微分可能なノルムをもてば，E 上の duality 写像は一価写像になる．

E を Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ としよう．このとき，$A \subset E \times E$ が増大作用素 (accretive operator) であるとは，$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ に対してつねに

$$(y_1 - y_2, j) \geqq 0$$

となる $j \in J(x_1 - x_2)$ が存在するときをいう．ただし，J は E の双対写像である．

補助定理 2.1　$x, y \in E$ とする．このとき，つぎの (1) と (2) は同値である．

(1) すべての $\lambda \geqq 0$ に対して，$\|x\| \leqq \|x + \lambda y\|$ である；

(2) $(y, f) \geqq 0$ となる $f \in J(x)$ が存在する．

この補助定理を用いて，増大作用素の特徴づけを行うことができる．

定理 2.2　つぎの条件 (1) と (2) は同値である．

(1) $A \subset E \times E$ は増大作用素である；

(2) すべての $\lambda \geqq 0$ と $(x_i, y_i) \in A$ $(i = 1, 2)$ に対して，つねに

$$\|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\| \geqq \|x_1 - x_2\|$$

が成り立つ．

$A \subset E \times E$ を増大作用素とする．このとき，すべての $\lambda > 0$ に対して，

$$J_\lambda x = \{z \in E :\ z + \lambda A z \ni x\} \tag{3}$$

を考えよう．

$$z_1 + \lambda w_1 = x, \quad z_2 + \lambda w_2 = x, \quad w_1 \in A z_1, \quad w_2 \in A z_2$$

とすると，A は増大作用素であるから

$$0 = \|z_1 + \lambda w_1 - (z_2 + \lambda w_2)\| = \|z_1 - z_2 + \lambda(w_1 - w_2)\| \geqq \|z_1 - z_2\|$$

である．よって，$z_1 = z_2$ であり，$J_\lambda x$ は一価となる．

また，J_λ の定義域と値域は

$$D(J_\lambda) = R(I + \lambda A), \quad R(J_\lambda) = D(A)$$

である．このような J_λ $(\lambda > 0)$ は A の resolvent とよばれ，(3) からもわかるように，

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} \quad (\lambda > 0)$$

である．この J_λ ($\lambda > 0$) から，A の吉田近似といわれる

$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda) \quad (\lambda > 0)$$

も定義できるが，J_λ，A_λ についてはつぎの性質が成り立つ．

定理 2.3（J_λ，A_λ の基本的性質）　$A \subset E \times E$ を増大作用素とし，$\lambda > 0$ とする．このとき，つぎの（i），(ii)，(iii)，(iv) が成り立つ．

（i）$\|J_\lambda x - J_\lambda y\| \leqq \|x - y\| \quad (^\forall x, y \in R(I + \lambda A))$；

（ii）A_λ は一価の増大作用素であり，かつ

$$\|A_\lambda x - A_\lambda y\| \leqq \frac{2}{\lambda}\|x - y\| \quad (^\forall x, y \in R(I + \lambda A));$$

(iii) $(J_\lambda x, A_\lambda x) \in A \quad (^\forall x \in R(I + \lambda A))$；

(iv) $\|A_\lambda x\| \leqq |Ax| \quad (^\forall x \in D(A) \cap R(I + \lambda A))$ である．ただし，$|Ax| = \inf\{\|z\| : z \in Ax\}$ である．

$A \subset E \times E$ が増大作用素であり，かつ

$$R(I + \lambda A) = E \quad (^\forall \lambda > 0)$$

が成立しているとき，A は m-増大作用素（m-accretive operator）であるといわれる．

定理 2.4（m-増大作用素の同値条件）　$A \subset E \times E$ が m-増大作用素であるための必要十分条件は，A が増大作用素で，かつ

$$\text{ある } r > 0 \text{ に対して } R(I + rA) = E$$

が成立することである．

定理 2.5（∂f は m-増大作用素）　H を Hilbert 空間とし，f を H から $(-\infty, \infty]$ への proper で下半連続な凸関数とする．このとき，∂f は m- 増大作用素である．

E を Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ を増大作用素とする．このとき，すべての $\lambda > 0$ に対して

$$\overline{D(A)} \subset R(I + \lambda A)$$

が成立するならば，A は値域条件（range condition）を満たすといわれる．

このとき，$A^{-1}0 = \{x \in D(A) : 0 \in Ax\}$ と A の resolvent J_r の不動点の集合の間にはつぎの関係がある．

補助定理 2.6　E を Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ を増大作用素とする．このとき，すべての $r > 0$ に対して

$$F(J_r) = A^{-1}0$$

である.

これを用いてつぎの補助定理を証明することができる.

補助定理 2.7　E を Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする．このとき，$x \in \bigcap_{r>0} R(I+rA)$ に対して，つぎの（i），(ii）が成立する.

（i）$t_n \to \infty$，$y = \lim_{n\to\infty} J_{t_n}x$ となる $\{t_n\}$ が存在すれば，$y \in A^{-1}0$ である.

(ii）E が一様凸であり，$t_n \to \infty$，$s_n \to \infty$，$y = \lim_{n\to\infty} J_{t_n}x$，$z = \lim_{n\to\infty} J_{s_n}x$ となる $\{t_n\}$，$\{s_n\}$ が存在すれば，$y = z$ となる.

定理 2.8（$r \to \infty$ のときの $J_r x$ の収束性）　E を一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする．C を E の空でない閉凸集合で，

$$\overline{D(A)} \subset C \subset \bigcap_{r>0} R(I+rA)$$

を満たすものとする．このとき，$0 \in R(A)$ ならば，任意の $x \in C$ に対して $\lim_{t\to\infty} J_t x$ が存在して，その極限は $A^{-1}0$ に属する.

つぎに $r \to \infty$ のときの $J_r x$ の収束先について，少々考察を加える.

E を Banach 空間とし，C，D を E の部分集合とする．P: $C \to D$ が sunny であるとは，$x \in C$ に対して，$Px + t(x - Px) \in C$，$t \geqq 0$ ならば

$$P(Px + t(x - Px)) = Px$$

がつねに成り立つことである.

補助定理 2.9　E を一様凸な Banach 空間とし，C を E の凸集合とする．また $C_0 \subset C$ とし，P を C から C_0 の上への retraction とする．このとき，任意の $x \in C$ と $y \in C_0$ に対して，$(x - Px, J(Px - y)) \geqq 0$ がつねに成り立つならば，P は nonexpansive であり，かつ sunny である.

定理 2.10　E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様な凸 Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．$\{T_1, T_2, T_3, \ldots\}$ を C から C への非拡大写像の列とし，$\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \phi$ を仮定する．$x \in C$ とし，$S_n = T_n T_{n-1} \ldots T_1\,(n \in N)$ とする．このとき，集合

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{co}\{S_m x : m \geqq n\} \cap U$$

は高々一点からなる．ただし $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ である.

3　Resolvents の収束定理

この節では，Halpern と Mann の不動点近似法のアイディアを用いて，resolvents の収束定理を証明する.

定理 3.1[6]　E を一様 Gateâux 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする．C を E の空でない閉凸集合で

$$\overline{D(A)} \subset C \subset \bigcap_{r>0} R(I + rA)$$

を満たすものとする．$x_0 = x \in C$ とし，

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

とする．ただし $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ を満たすものとする．このとき，$A^{-1}0 \neq \phi$ であるならば，$\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に強収束する．ここで，$Px = u$ とおくと，P は C から $A^{-1}0$ の上への sunny nonexpansive retraction である．

証明　$t > 0$ に対して，$z_t = J_t x$ とし，$y_n = J_{r_n} x_n$ とする．$A^{-1}0 \neq \phi$ から，$v \in A^{-1}0$ となる元 v が存在する．このとき，すべての $s > 0$ に対して，$J_s v = v$ である．そこで

$$\begin{aligned}
\|x_1 - v\| &= \|\alpha_0 x + (1 - \alpha_0) J_{r_0} x_0 - v\| \\
&\leqq \alpha_0 \|x - v\| + (1 - \alpha_0) \|J_{r_0} x_0 - J_{r_0} v\| \\
&\leqq \alpha_0 \|x - v\| + (1 - \alpha_0) \|x_0 - v\| \\
&= \|x - v\|
\end{aligned}$$

となる．いま，$\|x_k - v\| \leqq \|x - v\|$ を仮定すると，

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1} - v\| &= \|\alpha_k x + (1 - \alpha_k) J_{r_k} x_k - v\| \\
&\leqq \alpha_k \|x - v\| + (1 - \alpha_k) \|J_{r_k} x_k - J_{r_k} v\| \\
&\leqq \alpha_k \|x - v\| + (1 - \alpha_k) \|x_k - v\| \\
&\leqq \alpha_k \|x - v\| + (1 - \alpha_k) \|x - v\| \\
&= \|x - v\|
\end{aligned}$$

となり，数学的帰納法によりすべての $n \in N$ に対して，$\|x_n - v\| \leqq \|x - v\|$ であることがわかる．また

$$\|y_n - v\| = \|J_{r_n} x_n - v\| \leqq \|x_n - v\| \leqq \|x - v\|$$

であるから，$\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ は有界な点列である．

定理 2.8 より，$t \to \infty$ のとき，$J_t x$ は $A^{-1}0$ の元に強収束することを知っている．そこで，いま $z = \lim_{t\to\infty} J_t x$ とおくと，不等式

$$\limsup_{n\to\infty} (x - z, J(x_n - z)) \leqq 0 \tag{4}$$

が成り立つ．これを証明するためには

$$\limsup_{n\to\infty} (x - z, J(y_n - z)) \leqq 0 \tag{5}$$

を証明すればよい．実際

$$x_{n+1} - y_n = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) y_n - y_n = \alpha_n (x - y_n)$$

なので，$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ より，$x_{n+1} - y_n \to 0$ となる．ここで，E が一様 Gatêaux 微分可能なノルムをもつことより

$$\lim_{n\to\infty} |(x-z, J(x_{n+1}-z)) - (x-z, J(y_n - z))| = 0$$

となる．よって (5) は (4) を意味する．

(5) を証明する．定理 2.3 より，$A_t x \in AJ_t x = Az_t$，$A_{r_n} x_n \in AJ_{r_n} x_n = Ay_n$ を知っている．これらと A が増大作用素であることから

$$(A_{r_n} x_n - A_t x, J(y_n - z_t)) = \left(A_{r_n} x_n - \frac{x - z_t}{t}, J(y_n - z_t)\right) \geqq 0$$

である．よって

$$(x - z_t, J(y_n - z_t)) \leqq t(A_{r_n} x_n, J(y_n - z_t)) \tag{6}$$

である．また $r_n \to \infty$ より

$$\lim_{n\to\infty} \|A_{r_n} x_n\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{x_n - J_{r_n} x_n}{r_n} \right\| = 0 \tag{7}$$

でもある．いま，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$z_t \to z$ と E が一様 Gatêaux 微分可能なノルムをもつことより，

$$|(x-z, J(y_n - z)) - (x - z, J(y_n - z_s))| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (^\forall n)$$

であり，かつ

$$|(x-z, J(y_n - z_s)) - (x - z_s, J(y_n - z_s))| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (^\forall n)$$

となるような十分大きな $s > 0$ をとることができる．また (6) と (7) から，ある n_0 が存在し，$n \geqq n_0$ ならば

$$(x - z_s, J(y_n - z_s)) \leqq \frac{\varepsilon}{3}$$

である．そこで $n \geqq n_0$ ならば

$$\begin{aligned}(x - z, J(y_n - z)) &= (x - z, J(y_n - z)) - (x - z, J(y_n - z_s)) \\ &\quad + (x - z, J(y_n - z_s)) - (x - z_s, J(y_n - z_s)) \\ &\quad + (x - z_s, J(y_n - z_s)) \leqq \varepsilon\end{aligned}$$

である．これは

$$\limsup_{n\to\infty} (x - z, J(y_n - z)) \leqq \varepsilon$$

を意味する．$\varepsilon > 0$ は任意であるから

$$\limsup_{n\to\infty} (x - z, J(y_n - z)) \leqq 0$$

である．これで (5) が証明できた．

$$(1 - \alpha_n)(y_n - z) = x_{n+1} - z - \alpha_n (x - z)$$

なので，

$$(1-\alpha_n)^2\|y_n - z\|^2 \geqq \|x_{n+1} - z\|^2 - 2(\alpha_n(x-z), J(x_{n+1}-z))$$

を得る．よって

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - z\|^2 &\leqq (1-\alpha_n)^2\|y_n - z\|^2 + 2(\alpha_n(x-z), J(x_{n+1}-z)) \\ &\leqq (1-\alpha_n)\|x_n - z\|^2 + 2\alpha_n(x-z, J(x_{n+1}-z))\end{aligned}$$

である．(4) によって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 m があって，$n \geqq m$ ならば

$$(x-z, J(x_n - z)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

となるようにできる．よって，すべての n に対して

$$\|x_{n+m+1} - z\|^2 \leqq (1-\alpha_{n+m})\|x_{n+m} - z\|^2 + \alpha_{n+m}\varepsilon$$

である．これから

$$\|x_{n+m+1} - z\|^2 \leqq \prod_{i=m}^{n+m}(1-\alpha_i)\|x_m - z\|^2 + \left\{1 - \prod_{i=m}^{n+m}(1-\alpha_i)\right\}\varepsilon$$

を得る．よって

$$\|x_{n+m+1} - z\|^2 \leqq \exp\left(-\sum_{i=m}^{n+m}\alpha_i\right)\|x_m - z\|^2 + \varepsilon$$

を得る．そこで，$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = \infty$ より

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n - z\|^2 = \limsup_{n\to\infty}\|x_{n+m+1} - z\|^2 \leqq \varepsilon$$

となる．$\varepsilon > 0$ は任意であるから

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n - z\|^2 \leqq 0$$

となり，$\{x_n\}$ が z に強収束することがわかる．

定理 3.2[6]　E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする．C を E の空でない閉凸集合で

$$\overline{D(A)} \subset C \subset \bigcap_{r>0} R(I + rA)$$

を満たすものとする．$x_0 = x \in C$ とし，

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)J_{r_n}x_n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とする．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\limsup_{n\to\infty}\alpha_n < 1, \quad \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

を満たすものとする．このとき，$A^{-1}0 \neq \phi$ であるならば，$\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ のある元 v に弱収束する．

証明　$u \in A^{-1}0$ とし，$y_n = J_{r_n}x_n$ とする．$x \neq u$ と仮定してもよいので $l = \|x-u\| > 0$ に対して

$$D = C \cap \{z \in E : \|z-u\| \leqq l\}$$

とする．このとき，D は C の空でない有界閉凸集合で，すべての $s>0$ に対して $J_sD \subset D$ でもある．そこで一般性を失うことなしで，C を有界であると仮定できる．

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-u\| &= \|\alpha_n x_n + (1-\alpha_n)y_n - u\| \\ &\leqq \alpha_n\|x_n-u\| + (1-\alpha_n)\|y_n-u\| \\ &\leqq \|x_n-u\|\end{aligned}$$

より，$\{\|x_n-u\|\}$ は単調減少数列である．そこで，$\lim_{n\to\infty}\|x_n-u\|$ が存在する．いま，$c = \lim_{n\to\infty}\|x_n-u\|$ とする．一般性を失うことなしで $c>0$ と仮定してもよい．A が増大作用素であることと，E の凸性の modulus δ の性質より，

$$\begin{aligned}\|y_n-u\| &\leqq \left\|y_n-u+\frac{r_n}{2}(A_{r_n}x_n-0)\right\| \\ &= \left\|y_n-u+\frac{1}{2}(x_n-J_{r_n}x_n)\right\| \\ &= \left\|\frac{x_n+y_n}{2}-u\right\| \\ &\leqq \|x_n-u\|\left\{1-\delta\left(\frac{\|x_n-y_n\|}{\|x-u\|}\right)\right\}\end{aligned}$$

を得る．よって

$$\begin{aligned}(1-\alpha_n)\|x_n-u\|\,\delta\left(\frac{\|x_n-y_n\|}{\|x-u\|}\right) &\leqq (1-\alpha_n)\{\|x_n-u\|-\|y_n-u\|\} \\ &= \|x_n-u\|-\alpha_n\|x_n-u\|-(1-\alpha_n)\|y_n-u\| \\ &\leqq \|x_n-u\|-\|x_{n+1}-u\|\end{aligned}$$

である．ここで $\limsup_{n\to\infty}\alpha_n < 1$ と $c>0$ であることより，$\delta\left(\frac{\|x_n-y_n\|}{\|x-u\|}\right) \to 0$ を得る．

E は一様凸なので，δ の性質より，$x_n - y_n \to 0$ である．これと $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を用いて，$y_n - J_1y_n \to 0$ である．実際，

$$\begin{aligned}\|y_n-J_1y_n\| &= \|(I-J_1)y_n\| \\ &= \|A_1y_n\| \\ &\leqq \inf\{\|z\| : z \in Ay_n\} \\ &\leqq \|A_{r_n}x_n\| \\ &= \left\|\frac{x_n-y_n}{r_n}\right\| \to 0\end{aligned}$$

となるからである．いまや，$\{x_n\}$ が $A^{-1}0$ の元に弱収束することを示そう．

$\{x_n\}$ は有界であるから，弱収束する部分列 $\{x_{n_i}\}$ をもつ．$x_{n_i} \rightharpoonup v$ としよう．このとき，$x_n - y_n \to 0$ であることより，$y_{n_i} \rightharpoonup v$ でもある．ここで $y_n - J_1y_n \to 0$ を用いると

$v \in F(J_1) = A^{-1}0$ である．一方，$T_n = \alpha_n I + (1-\alpha_n)J_{r_n}$ とし，$S_n = T_n T_{n-1} \dots T_0$ とすると $F(T_n) = F(J_{r_n}) = A^{-1}0$，$x_{n+1} = S_n x$ を得る．そこで定理 2.10 を用いると

$$\{v\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{co}\{x_m : m \geqq n\} \cap A^{-1}0$$

である．よって，$\{x_n\}$ は v に弱収束する．

定理 3.1 および定理 3.2 の直接的結果としてつぎの 2 つの定理が得られる．

定理 3.3 H を Hilbert 空間とし，$A : H \to 2^H$ を極大単調作用素とする．$x_0 = x \in H$ とし，

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)J_{r_n}x_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とする．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$，$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$，$\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ を満たすものとする．このとき，$A^{-1}0 \neq \phi$ であるならば，$\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に強収束する．ここで，$Px = u$ とおくと．P は H から $A^{-1}0$ の上への metric projection である．

定理 3.4 H を Hilbert 空間とし，$A : H \to 2^H$ を極大単調作用素とする．$x_0 = x \in H$ とし，

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)J_{r_n}x_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とする．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$，$\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たすものとする．このとき，$A^{-1}0 \neq \phi$ であるならば，$\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に弱収束する．

4 応用

この節では，定理 3.3 および定理 3.4 を用いて，凸最小化問題の解を求める proximal point algorithm について議論する．

定理 4.1 H を Hilbert 空間とし，$f : H \to (-\infty, \infty]$ を proper で下半連続な凸関数とする．$x_0 = x \in H$ とし，

$$y_n = \operatorname*{arg\,min}_{z \in H} \left\{ f(z) + \frac{1}{2r_n}\|z - x_n\|^2 \right\},$$
$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)y_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とする．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$，$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$，$\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ を満たすものとする．このとき，$(\partial f)^{-1}0 \neq \phi$ であるならば，$\{x_n\}$ は $(\partial f)^{-1}0$ の元 v に強収束する．ここで，v は x に一番近い f の minimizer である．さらに，

$$f(x_{n+1}) - f(v) \leqq \alpha_n(f(x) - f(v)) + \frac{1-\alpha_n}{r_n}\|y_n - v\|\|y_n - x_n\|$$

が成り立つ．

証明 $$g_n(z) = f(z) + \frac{1}{2r_n}\|z - x_n\|^2 \quad ({}^{\forall} z \in H)$$

とすると，

$$\partial g_n(z) = \partial f(z) + \frac{1}{r_n}(z - x_n) \quad ({}^\forall z \in H)$$

である．いま

$$y_n = \operatorname*{arg\,min}_{z \in H} \, g_n(z)$$

とするならば，$0 \in \partial g_n(y_n) = \partial f(y_n) + \frac{1}{r_n}(y_n - x_n)$ となる．これより

$$x_n \in y_n + r_n \partial f(y_n) \tag{8}$$

となり，$J_{r_n} x_n = y_n$ を得る．ここで，補助定理 2.9 を用いると，$\{x_n\}$ は f の minimizer のうちの x に一番近い点 v に強収束する．

つぎに，(8) より，$\frac{1}{r_n}(x_n - y_n) \in \partial f(y_n)$ を得る．これから

$$f(v) \geqq f(y_n) + \left(\frac{1}{r_n}(x_n - y_n), v - y_n\right)$$

となる．よって

$$\begin{aligned}
f(x_{n+1}) - f(v) &= f(\alpha_n x + (1 - \alpha_n) y_n) - f(v) \\
&\leqq \alpha_n f(x) + (1 - \alpha_n) f(y_n) - f(v) \\
&= \alpha_n (f(x) - f(v)) + (1 - \alpha_n)(f(y_n) - f(v)) \\
&\leqq \alpha_n (f(x) - f(v)) + \frac{1 - \alpha_n}{r_n}(x_n - y_n, y_n - v) \\
&\leqq \alpha_n (f(x) - f(v)) + \frac{1 - \alpha_n}{r_n}\|y_n - x_n\|\|y_n - v\|
\end{aligned}$$

を得る．

定理 4.2 H を Hilbert 空間とし，$f : H \to (-\infty, \infty]$ を proper で下半連続な凸関数とする．$x_0 = x \in H$ とし，

$$\begin{aligned}
y_n &= \operatorname*{arg\,min}_{z \in H} \left\{ f(z) + \frac{1}{2r_n}\|z - x_n\|^2 \right\}, \\
x_{n+1} &= \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) y_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)
\end{aligned}$$

とする．ただし，$\{x_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$，$\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たすものとする．このとき，$(\partial f)^{-1} 0 \neq \phi$ であるならば，$\{x_n\}$ は $(\partial f)^{-1} 0$ の元 v に弱収束する．さらに，

$$f(x_{n+1}) - f(v) \leqq \alpha_n (f(x_n) - f(v)) + \frac{1 - \alpha_n}{r_n}\|y_n - v\|\|y_n - x_n\|$$

が成り立つ．

証明 定理 4.1 の証明と同じようにできる．

References

1. F. E. Browder, *Convergence of approximants to fixed points of nonexpansive nonlinear mappings in Banach space.* Archs. Ratio. Anal., 24 (1967), 82-90.
2. J. Diestel, *Geometry of Banach spaces, Selected Topics*, Lecture Notes in Mathematics 485, Springer, Berlin, 1975.
3. O. Güler, *On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization*, SIAM J. Control Optim., 29 (1991), 403-419.
4. B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 957-961.
5. S. Kamimura and W. Takahashi, *Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces*, to appear.
6. S. Kamimura and W. Takahashi, *Convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces*, to appear.
7. S. Kitahara and W. Takahashi, *Image recovery by convex combinations of sunny nonexpansive retractions*, Topol. Methods Nonlinear Analysis, 2 (1993), 333-342.
8. W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc., 4 (1953), 506-510.
9. B. Martinet, *Regularisation, d'inèquations variationelles par approximations succesives*, Revue Francaise d'Informatique et de Recherche Operationelle, 1970, 154-159.
10. J. J. Moreau, *Proximité et dualité dans un espace Hilbertien*, Bull. Soc. Math., France, 93 (1965), 273-299.
11. S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., 67 (1979), 274-276.
12. S. Reich, *Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces.* J. Math. Anal. Appl., 75 (1980), 287-292.
13. R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optim., 14 (1976), 877-898.
14. J. Schu, *Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings*, Bull. Austral. Math. Soc., 43 (1991), 153-159.
15. N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence of approximated sequence for nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 125 (1997), 3641-3645.
16. W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc., 81 (1981), 253-256.
17. W. Takahashi, *Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets*, J. Math. Soc. Japan, 36 (1984), 543-553.
18. W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc., 97 (1986), 55-58.
19. W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis (Japanese)* , Kindaikagakusha, Tokyo, 1988.
20. W. Takahashi, *Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity*, Can. J. Math., 44 (1992), 880-887.
21. W. Takahashi, *Fixed point theorems and nonlinear ergodic theorems for nonlinear semigroups and their applications*, Nonlinear Analysis, 30 (1997), 1283-1293.
22. W. Takahashi, *Fan's existence theorem for inequalities concerning convex functions and its applications*, in Minimax Theory and Applications (S. Simons and B. Ricceri, Eds.), Kluwer Academic Publishers, 1998, 241-260.
23. W. Takahashi and G. E. Kim, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Math. Japonica, 48 (1998), 1-9.
24. W. Takahashi and K. Shimoji, *Convergence theorems for nonexpansive mappings and feasibility problems*, Mathematical and Computer Modelling, to appear.
25. W. Takahashi and T. Tamura, *Limit theorems of operators by convex combinations of nonexpansive retractions in Banach spaces*, J. Approximation Theory, 91 (1997), 386-397.
26. W. Takahashi and T. Tamura, *Convergence theorems for a pair of nonexpansive mappings*, J. Convex Analysis, 5 (1998), 45-56.
27. W. Takahashi and Y. Ueda, *On Reich's strong convergence theorems for resolvents of accretive operators.* J. Math. Anal. Appl., 104 (1984), 546-553.
28. R. Wittmann, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings*, Arch. Math., 58 (1992), 486-491.